# ヤノフ形並列プログラム図式の決定可能問題 (情報科学の数学的基礎理論と応用)



山下, 雅史; 稲垣, 康善; 本多, 波雄

数理解析研究所講究録
353巻 1979年 238-247



# ヤノフ形並列プログラム図式の決定可能問題

名大・工 山下 雅史
三重大・工 稲垣 康善
名大・工 本多 波雄

## 1. はじめに

並列処理プログラムは，計算速度の向上に関する利点のほかに，最近ソフトウェア工学の立場から，プログラムの自然な構造化に対しても有効であることがたびたび指摘されている.[1] このような立場から並列処理プログラムに対する研究が進むと共に，構造化された並列処理プログラムを記述するための高級言語もいくつか提案され，実用化されている.[2] 著者らは，このような高級言語と容易に対応がつき，しかも形式的な取扱いにも適している並列プログラム図式(pps)を提案し，その性質を考察してきた.[3][4] 本稿では，ppsの並列に走る各プロセスがヤノフ図式の場合には，図式の自由性，停止性，発散性，相互排他性，決定性，デッドロック・フリー性，同型性，同値性という，図式の基本的な性質に関する決定問題が全て可解となることを示す.

## 2. 諸定義

[定義1] 並列プログラム図式 −pps− は以下で定義される.

pps = (program part, scheduler)

program part = (process 1, …, process m)

process = ($S_1$, …, $S_p$)

$S_i$ = $i$. statement

statement = assignment statement (ass. stat.) : $Y \leftarrow f(Y)$ / communication statement (com. stat.) : $c \in \Sigma$ (schedulerの入力記号の集合) / test statement (test stat.) : <u>if</u> P <u>then</u> i <u>else</u> j / halt statement (halt stat.) : <u>halt</u>

scheduler = ($K, \Sigma, \delta, q_0$) ここに, K: 状態の有限集合, $\Sigma$: 入力記号の有限集合, $\delta$: $K \times \Sigma \rightarrow K$ は推移関数, $q_0 \in K$ は初期状態, である. ▨

[定義2] ppsの解釈 $\mathcal{I}$ をつぎのように定める.

(i) 空でない集合 $\mathcal{D}$ (解釈の領域)

(ii) 各 n 変数関数記号 $f_i^n$ に $\mathcal{D}^n$ から $\mathcal{D}^n$ への全域関数を割当てる.

(iii) 各 n 変数述語記号 $p_i^n$ に $\mathcal{D}^n$ から {true, false} への全域述語を割当てる. ▨

pps $S$ と解釈 $\mathcal{I}$ の組 $<S, \mathcal{I}>$ を並列プログラムと呼ぶ. 並列プログラムの初期値ξに対する実行は計算状況 (LC, Q, Y) (LC: 各プロセスのロケーション・カウンタの値, Q: スケジューラの状態, Y: 各変数の値) の推移で表現される. 厳密な推移規則は

文献[4]に譲り，ここでは概略を述べる．実行は，各プロセスのロケーション・カウンタが指すステートメントの中の1つを非決定的に選択し，実行することによって行われる．ただしスケジューラの状態が受理しない入力記号の集合に含まれる，com.stat.は選択されない．したがって，並列プログラム$\langle S, I\rangle$ の初期値$\xi$に対する計算の結果$val\langle S, I, \xi\rangle$は，各プロセスの実行順序に任意性があることから，一般には一意に決定されない．そこで，$val\langle S, I, \xi\rangle$を，各プロセスが停止したときの結果変数の値の集合として定義する．

[定義3] ppsが以下の2条件をみたすとき，ヤノフ形pps（pis）であるという．プログラム変数を$y$で示す．

(i) ppsに現れるどの述語記号$p$も$p(y)$という形を持つ．

(ii) ppsに現れるどの関数記号$f$も，それを用いたass.stat.は$y \leftarrow f(y)$という形を持つ．▨

<例1> pisの例を示す．

process$_1$

1. <u>if</u> $p(y)$ <u>then</u> 2 <u>else</u> 7
2. $y \leftarrow f(y)$
3. a
4. $y \leftarrow g(y)$
5. b
6. <u>goto</u> 1
7. <u>halt</u>

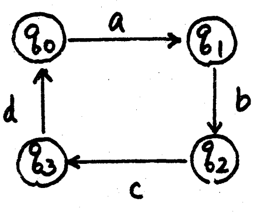
process$_2$

1. c
2. $y \leftarrow g(y)$
3. d
4. <u>if</u> $p(y)$ <u>then</u> 1 <u>else</u> 5
5. <u>halt</u>

scheduler $= (K, \Sigma, \delta, q_0)$

$K = \{q_0, \cdots, q_3\}$

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$




$\delta$ ▨

[定義4] (i) pps のどの2つの同じ述語記号も，任意の解釈に対する実行において，同じ引数の値に対して評価されることがないとき，ppsは自由であるという．
(ii) pps の停止，発散は通常通り定義する．
(iii) ppsの計算が任意の解釈と初期値に対して一意に決定するとき，pps は決定性であるという．
(iv) pps の任意の解釈と初期値に対する計算に現れる停止状態ではない計算状況が少なくとも1つの推移を持つとき，pps はデッドロック・フリーであるという．
(v) プロセスにおいて，test stat. を含まないステートメントの列をブロックと呼ぶ．pps のあるブロックの集合を $\mathfrak{B}$ とする．pps の実行の任意の段階において，$\mathfrak{B}$ の中の任意の2つのブロックに含まれるステートメントがどちらも実行可能となることがないとき，$\mathfrak{B}$ は pps において相互排他されているという．
(vi) 2つの pps $S$ と $S'$ とが同値であるとは，任意の解釈 $\mathcal{I}$ と初期値 $\xi$ に対して，$val\langle S, \mathcal{I}, \xi\rangle = val\langle S', \mathcal{I}, \xi\rangle$ となることである．
(vii) 2つの pps $S$ と $S'$ において，任意の解釈 $\mathcal{I}$ と初期値 $\xi$ に対して，com. stat. と halt stat. を無視すれば，$S$ において実行されるステートメント列の集合と $S'$ において実行されるステートメント列の集合が一致するとき，同型という． ▨

## 3. pis の性質に関する決定可能問題

本節では、pisの性質に関する種々の決定問題を考察し，その可解性を示す．そのためにここで用いる方法は，主としてpisの動作を非決定性$n$テープ有限オートマトン（$n$-NFA）で模倣することによって，各種の決定問題を$n$-NFA，または$n$-NFAに１本の出力用テープを取付けた，マージ機械（$n$-MM）の上のいくつかの可解な問題に帰着することである．

［定義5］ $n$-NFAは６項組$\mathcal{T}=(n,K,\Sigma,\delta,q_0,F)$である．ここに，$n$：テープ数，$K$：状態の有限集合，$\Sigma$：入力記号の有限集合（$\$$：エンド・マークとして使用），$\delta: K\times\Sigma^n\to 2^{K\times\{0,1\}^n}$は推移関数，$q_0\in K$ は初期状態，$F\subseteq K$は最終状態の集合，である．　▨

$n$-NFAの動作は通常のとおり（例えば文献[4]）定義される．

<定理1>任意の$n$-NFA $\mathcal{T}=(n,K,\Sigma,\delta,q_0,F)$と語の集合$W=\{w \mid w=(r_1\$,\cdots,r_n\$),\ r_i\in|R_i|,\ R_i$は$\Sigma-\{\$\}$上の正規表現$\}$に対して，$\mathcal{L}(\mathcal{T})\cap W=\phi$ か否かは可解である．　▨

マージ機械（$n$-MM）は$n$-NFAに１本の出力用テープを取付けた，一種の変換器である．土台となる$n$-NFAは任意の推移に対して，ただ１ヶ所だけヘッドを動かす．出力用テープに出力される記号は，各推移の際に読まれる記号である．$n$-MM $\mathcal{M}$の入力テープに語$w$をかけたとき，$\mathcal{M}$が$w$を受理するときに出力される記号列の集合を$s(\mathcal{M},w)$と書く．語の集合Wに

対して，変換 $\tau(\mathcal{M},W)$ を $\bigcup_{w\in W}\rho(\mathcal{M},w)$ で定義する．

<定理2> 任意の n-HM $\mathcal{M}$，語の集合 $W=\{w \mid w=(r_1\$,\cdots,r_n\$),\ r_i\in|R_i|$ $R_i$ は正規表現$\}$ に対して，$\tau(\mathcal{M},W)$ は正規集合である．▨

3.1 pis の自由性，停止性，発散性，デッドロック・フリー性 相互排他性の可解性

pps においても，流れ図図式と同様，図式の性質に関する多くの問題は，全ての解釈を考えなくとも，エルブラン解釈だけを考えれば十分である．以下では解釈をエルブラン解釈に限定する．また，取扱いの簡便さのため，pis の各プロセスを正規プログラム図式[5]として表現する．ただし，process$_i$ の halt stat. を $h_i$ で示す．

<例2> 例1の pis の各プロセスは以下のように表現される．

process$_1$: $(pfagb)^*\bar{p}h_1$　　process$_2$: $cgd(pcgd)^*\bar{p}h_2$ ▨

さて，任意の pis を S とする．S のスケジューラを $\mathcal{S}=(K,\Sigma,\delta,q_0)$，各プロセスを表現する正規プログラム表現を $R_i$ とする．S に現れる関数記号の集合を $\Phi$，述語記号の集合を $\Pi$，$\bar{\Pi}=\{\bar{p}\mid p\in\Pi\}$，$H=\{h_1,\cdots,h_n\}$ とする．ここで，以下で使用する記法をまとめておく．

[記法](i) $v_i^a$ ($1\le i\le n$, $a\in A$, A は記号の集合) で第 i 要素が a，それ以外の要素は A の任意の元である n 項組を示す．(ii) $\delta_i$ ($1\le i\le n$) で第 i 要素のみが 1 で他の要素は 0 である n 項組を

示す．(iii) $(v)_i$ $(1 \leq i \leq n)$ で $n$ 項組 $v$ の第 $i$ 項を示す． ▨

$S$ が自由性，発散性を持つか否かは可解であることを示す．

<構成1> $S$ に対して $n$-NFA $\mathfrak{J} = (n, K', \Sigma', \delta', q_0', F)$ と語の集合 $W$ を以下のように構成する．

(1) $K' = \{q_\sigma \mid q \in K, \sigma \in 2^{\Psi \cup \bar{\Psi} \cup H}, \sigma \cap H \neq H\} \cup \{q_f, q_h\}$ ($q_{\{\}}$ を $q$ と略記する) (2) $\Sigma' = \Sigma \cup \Phi \cup \Psi \cup \bar{\Psi} \cup H \cup \{\$\}$ (3) $q_0' = q_0$ (4) $I(\sigma) = \{i \mid 1 \leq i \leq n, h_i \notin \sigma\}$ と定義する．このとき，$\delta'$: (i) $\delta(q, a) = r$ ($q, r \in K$, $a \in \Sigma$) ならば，$\forall i \in I(\sigma)$ に対して，$\delta'(q_\sigma, v_i^a) \ni (r_\sigma, D_i)$ (ii) $\forall f \in \Phi$, $\forall q \in K$, $\forall i \in I(\sigma)$ に対して，$\delta'(q_\sigma, v_i^f) \ni (q_{\sigma \cap H}, D_i)$ (iii) $\forall p \in \Psi \cup \bar{\Psi}$, $\forall q \in K$, $\forall i \in I(\sigma)$ に対して，$\delta'(q_\sigma, v_i^p) \ni$ if $(\sigma \not\ni \bar{p})$ then $(q_{\sigma \cup \{p\}}, D_i)$ else $(q_f, D_i)$ (iv) $\forall h_i \in H$, $\forall q \in K$, $\forall i \in I(\sigma)$ に対して，$\delta'(q_\sigma, v_i^{h_i}) \ni$ if $((\sigma \cup \{h_i\}) \cap H \neq H)$ then $(q_{\sigma \cup \{h_i\}}, D_i)$ else $(q_h, D_i)$ (v) $\forall q \in \{q_f, q_h\}$, $\forall v \in \Sigma^n$ $(v \neq (\$, \cdots, \$))$ $\forall i \in \{i \mid (v)_i \neq \$\}$ に対して，$\delta'(q, v) = (q, D_i)$ である．$W$ は $W = \{w \mid w = (r_1\$, \cdots, r_n\$), r_i \in |R_i|\}$ である．<構成終>

このとき，$\mathfrak{J}$ の作り方と，$W$ の任意の元の第 $i$ 要素は process$_i$ の halt stat. に至るある実行系列を示すことから，つぎの定理が成立することがわかる．

<定理3> (i) $\mathcal{L}(\mathfrak{J}_{\{q_f\}}) \cap W = \phi \Leftrightarrow S$ は自由である．

(ii) $\mathcal{L}(\mathfrak{J}_{\{q_h\}}) \cap W = \phi \Leftrightarrow S$ は発散する．

($\mathfrak{J}_F$ は $\mathfrak{J}$ において $F$ を最終状態の集合としたもの) ▨

<系> 定理1より $P_iS$ の自由性，発散性問題は可解である． ▨

証明は略すが，pisの停止性，デッドロック・フリー性，相互排他性の可解性は自由性，発散性の場合と同様のn-NFAを構成することによって，証明される．

<系> pisの停止性，デッドロック・フリー性，相互排他性，決定問題は可解である． ▨

3.2 pisの同型性，決定性，同値性，決定問題

まず，補題を1つ示す．pis $S$において，$\mathcal{E}_h(S)=\{e \mid \exists \mathfrak{I}^*$: エルブラン解釈，$e$は$<S,\mathfrak{I}^*>$の停止に至るステートメントの実行系列$\}$と定義する．このとき，定理2より，

<補題> $\mathcal{E}_h(S)$は正規集合である． ▨

また，$\mathcal{E}_d(S)=\{e \mid \exists \mathfrak{I}^*$: エルブラン解釈，$e$は$<S,\mathfrak{I}^*>$のデッドロックに至るステートメントの実行系列$\}$とすると，定理2の簡単な変形から，$\mathcal{E}_d(S)$は正規集合であることがわかる．$\mathcal{E}_h(S)$と$\mathcal{E}_d(S)$の各元に対して，元に含まれる亜∪亜∪亜以外の記号を空列に置換えた集合をそれぞれ$\mathcal{E}'_h(S)$，$\mathcal{E}'_d(S)$とする．$\mathcal{E}'_h(S)$，$\mathcal{E}'_d(S)$はもちろん正規集合である．このとき，

<定理4> pis $S$と$S'$が同型である．$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{E}'_h(S)=\mathcal{E}'_h(S') \wedge \mathcal{E}'_d(S)=\mathcal{E}'_d(S') \quad ▨$$

<系> pisの同型問題は可解である． ▨

つぎに，pisが決定性であるか否かの問題を考察する．任意のエルブラン解釈$\mathfrak{I}^*$に対して，val$<S,\mathfrak{I}^*,x>$が1元しか持た

なければ，$S$は決定性である．

<構成2> $S$に対して，2-NFA $\mathfrak{M}=(2, K, \Sigma, \delta, q_0, F)$と語の集合Wを以下のように構成する．

(1) $K=\{q_{(\sigma_1,\sigma_2)}\}\cup\{q_f, q_d\}$ $(\sigma_i\subseteq\Pi\cup\bar{\Pi})$ (2) $\Sigma=\Phi\cup\Pi\cup\bar{\Pi}$ (3) $q_0=q_{(\{\},\{\})}$ (4) $F=\{q_f\}$ (5) $\delta$: (i) $\forall(a_1,a_2)\in\Sigma^2$ ($a_1=a_2=\$$ ではない) $\forall q\in\{q_f, q_d\}$ に対して，$\delta(q,(a_1,a_2))=(q,(d_1,d_2))$ ($d_i=$ if $(a_i=\$)$ then 0 else 1) (ii) $\forall a, b\in\Phi$ $(a\neq b)$，$\forall q_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ に対して $\delta(q_{(\sigma_1,\sigma_2)},(a,a))\ni(q_{(\{\},\{\})},(1,1))$, $\delta(q_{(\sigma_1,\sigma_2)},(a,b))\ni(q_f,(1,1))$, $\delta(q_{(\sigma_1,\sigma_2)},(a,\$))\ni(q_f,(1,0))$, $\delta(q_{(\sigma_1,\sigma_2)},(\$,a))\ni(q_f,(0,1))$ (iii) $\forall p\in\Pi\cup\bar{\Pi}$, $\forall q_{(\sigma_1,\sigma_2)}$, $\forall \Delta\in\Sigma$ に対して，$\delta(q_{(\sigma_1,\sigma_2)},(p,\Delta))\ni(r,(1,0))$ ($r=$ if $(\sigma_2\ni\bar{p})$ then $q_d$ else $q_{(\sigma_1\cup\{p\},\sigma_2)}$)，$\delta(q_{(\sigma_1,\sigma_2)},(\Delta,p))\ni(r,(0,1))$ ($r=$ if $(\sigma_1\ni\bar{p})$ then $q_d$ else $q_{(\sigma_1,\sigma_2\cup\{p\})}$)，である．$W=\{w\mid w=(r_1\$, r_2\$),\ r_i\in Ch(S)\}$である．<構成終>

このとき，つぎの定理が成立する．

<定理5> $\mathcal{L}(\mathfrak{M})\cap W=\phi \Leftrightarrow S$は決定性である．▨

<系> pisの決定性問題は可解である．▨

最後に同値問題を考察する．$(\Phi\cup\Pi\cup\bar{\Pi})^*\ni t$に対して，$t$の述語記号を空列で置換えた列を$\tilde{t}$と書く．同値の定義より，同値問題が可解であるためには任意のpis $S$と$S'$に対して，以下の問題(A)が可解となることが示されれば十分である．

『$\forall t\in Ch(S)$ $\forall \jmath$：$t$が$\jmath$に矛盾しない $\Rightarrow \exists s\in Ch(S')$，$s$は$\jmath$と矛盾せず，$\tilde{t}=\tilde{s}$である』(A)

$Ch(S)\ni t$は$t=\sigma_0 f_1\sigma_1\cdots f_n\sigma_n$ $(f_i\in\Phi, \sigma_i\in(\Pi\cup\bar{\Pi})^*)$と書ける．$\sigma_i$

に含まれる述語記号の集合を $P_i$ とする. $\mathcal{R}(S)=\{\rho_0 f_1\cdots f_n\rho_n \mid \sigma_0 f_1 \cdots f_n\sigma_n \in \mathcal{L}_R(S)\}$ とする. $\mathcal{E}(P_i)=\{\eta \mid \eta\in 2^{\mathcal{P}\cup\mathcal{P}},\ P_i\subseteq\eta,\ p\in\eta \Leftrightarrow \bar{p}\notin\eta\}$ とする. $\mathcal{R}'(S)=\{\eta_0 f_1\cdots f_n\eta_n \mid \rho_0 f_1\cdots f_n\rho_n\in\mathcal{R}(S),\ \eta_i\in\mathcal{E}(P_i)\}$ とする. このとき, (A)は『$\forall x\in\mathcal{R}'(S), \exists s\in\mathcal{R}(S')$, $s$は$x$で定まる解釈に矛盾せずしかも $\tilde{x}=\tilde{s}$ である』(B)と同値である.

<構成3> 1-NFA $\mathcal{F}_{S'}=(1,K',\Sigma',\delta',q_0',F')$ を以下のように構成する. $\mathcal{R}(S')$を受理する1-NFA を $A_{S'}=(1,K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ とする. $\mathcal{R}(S')$の性質より, $K=K_{\mathcal{F}}\cup K_{\mathcal{P}}$ ($q\in K_{\mathcal{F}}\Rightarrow\delta(q,\sigma)=\phi$ ($\sigma\in 2^{\mathcal{P}\cup\mathcal{P}}$), $q\in K_{\mathcal{P}}\Rightarrow\delta(q,f)=\phi$ ($f\in\mathcal{F}$)) と分割できる. (1) $K'=K$ (2) $\Sigma'=\Sigma$ (3) $q_0'=q_0$ (4) $F'=F$ (5) $\delta'$: (i) $\forall q\in K_{\mathcal{F}}$に対して, $\delta(q,f)\ni q'\Rightarrow\delta'(q,f)\ni q'$ (ii) $\forall q\in K_{\mathcal{P}}$に対して $\delta(q,\sigma)\ni q'\Rightarrow\forall\rho\supseteq\sigma, \delta'(q,\rho)\ni q'$ <構成終>

このとき, 以下の定理が成立する.

<定理6> $\mathcal{R}'(S)\subseteq\mathcal{L}(\mathcal{F}_{S'})\Leftrightarrow$ (B) が成立する. ▨

<系> pisの同値問題は可解である. ▨

謝辞: 日頃, 御指導をいただく本学福村晃夫教授, 三重大大山口通夫助教授に感謝します.

文献: (1) P.B. Hansen : IFIP74 p394 (1974)

(2) P.B. Hansen : C.I.T. Report (1975)

(3) 山下, 稲垣, 本多: 信学技報 AL78-7 (1978)

(4) 山下, 稲垣, 本多: 信学技報 AL78-78 (1979)

(5) 伊藤: プログラム理論 コロナ社 (1972)